

# En ny kursplan i matematik

– hur den skulle kunna  
se ut och varför

JOHAN PRYTZ



Näringslivets  
skolforum

SWEDISH ENTERPRISE SCHOOL FORUM

**En ny kursplan i matematik**

**Författare: Johan Prytz**

**November 2023**

**Näringslivets skolforum, Stockholm**

**Foto omslag: Greg Rosenke, Unsplash**

# Innehållsförteckning

Sammanfattning	5
1. Inledning	7
2. Styrmodeller och styrdokuments betydelse	9
3. Kursplaner i matematik i olika länder	13
3.1 Varför dessa länder?	13
3.2 Hur kan man jämföra olika kursplaner?	14
3.3 Sverige	15
3.4 Singapore	18
3.5 England	26
3.6 Estland	31
4. Sammanfattande slutsatser	35
4.1 Kopplingen mellan matematik och förmågor	35
4.2 Progression	36
5. Vägar framåt mot en ny svensk kursplan	38
Appendix A: Jämförelse mellan kursplanerna i Sverige och Singapore	39
Referenser	42

---

**Näringslivets skolforum** är ett initiativ från Svenskt Näringsliv för att stärka Sveriges kompetensförsörjning och förbättra kunskapsresultaten i svensk skola. Syftet är att erbjuda en arena för ökad probleminsikt, förutsättningslös dialog, internationell utblick och erfarenhetsutbyte.



# Sammanfattning

Vad som står i skolans styrdokument har betydelse för vad som händer i skolan. Detta gäller även undervisning och lärande. Inom det området är ämneskursplanernas design viktig, vilket såväl internationell som nationell forskning har visat.

I en tidigare rapport från Näringslivets skolforum (NSF) presenteras slutsatsen att en ny svensk kursplan i matematik, i jämförelse med dagens, bör ha en design som bygger mer på utförliga och precisa beskrivningar med ämnesspecifika uttryck och begrepp. Den rapporten baseras på jämförelser av den svenska grundskolans samtliga kursplaner i matematik från år 1962 till nutid.

I denna rapport utvecklas den slutsatsen. Syftet är att bredda bilden av hur en framtida svensk kursplan kan se ut. Det görs dels genom en genomgång av relevant internationell forskning om styrning och kursplaners design: en genomgång som belyser vikten av mer detaljerade kursplaner och vad de kan förväntas åstadkomma. Och det görs dels genom en jämförande undersökning av samtida kursplaner i matematik i Sverige, Singapore, England och Estland. I fallet Singapore undersöks två kursplaner (en äldre och en nyare) eftersom landet är mitt uppe i en kursplanerevision. Såväl Singapore, England som Estland har klarat sig mycket väl i internationella kunskapsmätningar i matematik (TIMSS och PISA).

Forskning om styrning av skolämnen, undervisning och lärande understryker vikten av "curriculum coherence". Enkelt uttryckt innebär det att aktörerna i ett skolsystem har en gemensam förståelse av ämnesundervisningens syfte och innehåll samt att de drar åt samma

håll. Ett sätt att uppnå curriculum coherence är att ha mer detaljerade nationella ämneskursplaner, men det förutsätter också att dessa accepteras av olika aktörer i skolsystemet.

De fyra kursplanerna i matematik från Singapore (den äldre och den nyare), England och Estland är exempel på kursplaner med betydligt mer utförliga och precisa beskrivningar baserade på ämnesspecifika uttryck och begrepp. Undersökningen av dessa kursplaner har sökt svar på frågan vad dessa typer av beskrivningar används till. Svaren samlas under följande två teman: a) koppla ihop matematik med förmågor och b) beskriva progression. Dessa två saker görs på olika sätt; alla fyra kursplanerna skiljer sig åt på väsentliga punkter. Inte minst skiljer de sig åt vad gäller detaljnivå.

Värt att notera är att ingen av de tre ländernas kursplaner saknar uttryck för förmågor. I jämförelse med den svenska kursplanen i matematik står det klart att den svenska har en mycket enkel konstruktion vad gäller att koppla ihop matematik med förmågor och att beskriva progression – det görs i mycket liten utsträckning. I Sverige lämnas således besluten i dessa frågor i högre grad till skolans många andra aktörer.

Den jämförande undersökningen av kursplanerna ger alltså konkreta exempel på olika vägar som utvecklades av en ny svensk kursplan i matematik kan följa. Därtill står det klart att dessa vägar kräver förberedelse, planering och skrivtekniskt kunnande gällande matematik, förmågor och progression. Förmodligen kommer förberedelse- och planeringsfaserna vara viktiga för att nå curriculum coherence. Om regeringen till exempel tänker sig en ännu mer kunskaps-

orienterad kursplan i matematik med mer fokus på ämneskunskaper, måste den förstå att det kan göras på flera olika sätt. Vill regeringen ha någon annan typ av design på kursplanen än dagens, bör den kommunicera det med berörda skolmyndigheter – inte minst med dem som blir satta att skriva kursplanen. Och slutligen: Vill regeringen behålla nuvarande design på de nationella kursplanerna, bör den kunna svara på varför det är bra att andra aktörer har så stort inflytande i frågor som rör progression och kopplingen mellan matematik och förmågor.

# 1. Inledning

Skolans styrdokument påverkar vad som händer i skolan. Detta gäller även de nationella styrdokument som rör skolans uppdrag att förmedla kunskaper och åstadkomma lärande. I Sverige kallar vi dessa styrdokument för läroplanen, som till varje skolämne har en specifik kursplan. Från utbildningsvetenskaplig forskning, baserad bland annat på omfattande data från flera länder, vet vi att matematikkursplaner och deras utformning har potential att påverka innehållet i läromedel och undervisning samt vad eleverna lär sig.<sup>1</sup> I korthet pekar forskningen på att det som kursplanen lägger vikt vid är det som får mer utrymme eller uppmärksamhet i läromedel och undervisning; elevernas kunskaper är också starkast i dessa delar. I vilken grad och hur läromedel, undervisning och lärande påverkas kan dock variera mellan länder. Att betona eller lägga vikt vid något i en kursplan kan emellertid göras på olika sätt och den önskade effekten kan utebli, vilket jag återkommer till nedan.

I en nyligen publicerad rapport (Prytz 2023), baserad på forskningsresultat, presenteras slutsatsen att en framtida svensk kursplan i matematik i större grad bör präglas av mer utförliga och precisa beskrivningar med ämnesspecifika uttryck och begrepp; detta står i kontrast till existerande kursplan där generiska uttryck och begrepp används i större utsträckning. Rapporten går igenom samtliga kursplaner i matematik och hur deras design kan kopplas till elevers testresultat. I rapporten pekas på att kursplanen till 1980 års läroplan (Lgr 80), i synnerhet den mer detaljerade aritmetikdelen, förefaller ha varit en särskilt framgångsrik kursplanedesign om vi ser till hur kunskapsresultaten har utvecklats<sup>2</sup>.

Lgr 80 kan dock inte stå som ensam förebild för en framtida kursplan. Samhällets behov av matematik har förändrats, likaså kunskapsläget angående lärande och undervisning i matematik.

Syftet med denna rapport är att bredda bilden av hur en framtida svensk kursplan i matematik kan se ut, en kursplan som till stor del bygger på utförliga och precisa beskrivningar med ämnesspecifika uttryck och begrepp. Detta görs på två sätt:

A. En genomgång av relevant forskning om styrmodeller och styrdokuments betydelse. Genomgången tydliggör att en mer centraliserad styrmodell är att föredra och hur kursplaner i en sådan modell ser ut. Genomgången tydliggör också vad den typen av kursplaner kan förväntas göra i relation till läromedel, lärare och elever. Slutsatsen från den föregående rapporten om behovet av en mer detaljerad kursplan förankras också i denna forskning, för att stärka slutsatsens giltighet.

<sup>1</sup> Se kap. 2 i denna rapport.

<sup>2</sup> Det ska dock framhållas att rapporten inte anger kursplanen som den enda framgångsfaktorn; det är en av flera andra faktorer som kan påverka kunskapsresultaten.

B. En genomgång av hur nutida kursplaner i olika länder (Singapore, England och Estland) är konstruerade, kursplaner som till stor del bygger på utförliga och precisa beskrivningar med ämnesspecifika uttryck och begrepp. Appendix A i denna rapport ger en snabb bild av skillnaden mellan Singapores och Sveriges kursplaner i detta avseende. Denna rapport söker svar på frågan vad de utförliga och precisa beskrivningarna med ämnesspecifika uttryck används till.

De konkreta kursplaner som diskuteras i rapporten gäller årskurser som motsvarar den svenska grundskolan: årskurs 1 till 9, samt förskoleklassen. Ålder för skolstart och indelningen i stadier skiljer sig dock åt mellan länderna; se tabell 1.

**Tabell 1.** Årskursindelning i Sverige, Singapore, England och Estland

Ålder*	Sverige	Singapore	England	Estland
5			åk 1	
6	åk F	åk 1	åk 2	
7	åk 1	åk 2	åk 3	åk 1
8	åk 2	åk 3	åk 4	åk 2
9	åk 3	åk 4	åk 5	åk 3
10	åk 4	åk 5	åk 6	åk 4
11	åk 5	åk 6	åk 7	åk 5
12	åk 6	åk 7	åk 8	åk 6
13	åk 7	åk 8	åk 9	åk 7
14	åk 8	åk 9	åk 10	åk 8
15	åk 9	åk 10		åk 9
16		åk 11		

\* Avser ålder det året då eleverna börjar en viss årskurs på hösten samma år.

De streckade linjerna markerar stadiindelning.



## 2. Styrmodeller och styrdokuments betydelse

I forskning om skolans styrning används modeller med olika typer av läroplaner (curriculum på engelska) för att bättre förstå hur olika delar i ett skolsystem samverkar.

I TIMSS och PISA används till exempel denna modell:

- *Den avsedda läroplanen (the intended curriculum)*. Denna läroplanstyp omfattar styrdokument och andra policydokument vars syfte är att styra skolan. Dessa anger vad som ska göras i skolan.
- *Den implementerade läroplanen (the implemented curriculum)*. Denna läroplanstyp handlar om vad som händer i skolan. Ett grundläggande forskningsproblem är att reda ut vad av den avsedda läroplanen som verkligen implementeras i skolan och hur. Vi kan inte anta att allt som står i ett styrdokument verkligen realiseras i skolan.
- *Den uppnådda läroplanen (the achieved curriculum)*. Denna läroplanstyp handlar om vad eleverna lär sig, det vill säga de kunskaper och normer de utvecklar. Olika typer av kunskapsmätningar används för att kartlägga detta.

I modellen betraktas *läromedel* som en länk mellan den avsedda och implementerade läroplanen. Exakt hur den länken fungerar har varit föremål för forskning, vilket jag återkommer till nedan.

När vi i Sverige pratar om läroplaner och kursplaner är det ofta *den avsedda läroplanen* som avses. I engelskspråkiga länder kan uttrycket curriculum avse betydligt mer och inkludera alla tre typerna ovan.

Mycket av den forskning som görs utifrån dessa modeller försöker förklara hur de olika typerna av läroplaner hänger ihop. Inte minst från utbildningshistorisk forskning vet vi att reformer av skolan inte bara är en fråga om att sätta upp mål i ett styrdokument och så följer skolverksamheten dessa enligt plan och eleverna lär sig det som anges i målen.<sup>3</sup> Likväl visar forskning att styrdokument har potential att påverka undervisning och lärande, men vissa styrmodeller och designer på styrdokument förefaller vara mer effektiva än andra.

Utifrån bland annat data från storskaliga internationella kunskapsmätningar (till exempel TIMSS) menar Green (1997) att centraliserad skolstyrning oftast är bättre, om vi med bättre avser att styrningen leder till goda kunskapsresultat i större delen av elevgruppen och inte enbart i en mindre del. Bland annat Sverige lyfts fram som ett positivt exempel, men även flera asiatiska länder som Singapore, Taiwan och Sydkorea. Som kontrast till detta ställs framför allt England och USA, med mycket

<sup>3</sup> Det finns gott om historiska exempel på när reformer, trots noggranna förberedelser, inte minst av styrdokument, inte fungerat. Ett välstuderat exempel inom skolmatematiken är de så kallade New Math reformerna på 1960- och 70-talen. För den svenska reformen, se Prytz (2018). De Bock (2023) ger en internationell överblick.

decentraliserade skolsystem och jämförelsevis låga resultat i internationella kunskapsmätningar. Notera att Green skrev detta år 1997 och att vissa länder därefter har ändrat styrmodell. Exempelvis har Sverige valt en mer decentraliserad styrmodell, medan England har valt en mer centraliserad.

Centraliserad skolstyrning är emellertid inte en specifik modell, enligt Green. I asiatiska länder tillämpas en mer renodlad statlig styrning och i Europa en mer korporativistisk central styrning. Med det senare avses att olika intressegrupper ges inflytande i besluts- och styrprocesser. Det har alltså alltid funnits variation i de centraliserade styrmodellerna mellan de länder som nått goda resultat, men med vissa gemensamma drag.

Although not invariably ‘centralized’, the most effective systems do indeed all appear to show signs of ‘tight regulation’ in the critical areas, with high levels of policy coherence, institutional systematization and close articulation between levels of the ET [education and training] system and between the ET systems and the labour market. (Green, 1997, s. 129)

Som framgår av citatet handlar centraliserad styrning om mer än detaljerade nationella styrdokument. Green går dock inte specifikt in på styrdokumentens design och egenskaper, men vi vet att till exempel Singapores och Sveriges styrdokument var detaljerade. Singapore behöll den typen av styrdokument, medan Sverige övergav den efter 1994 (jämför Prytz 2023; Teng m.fl. 2020).

Att styrdokument i form av ämneskursplaner kan ha betydelse för läromedels och undervisningens innehåll och i slutändan elevernas lärande visas av Schmidt med flera (2001). Till grund för analysen ligger storskaliga data från TIMSS 1995 som omfattade 36 länder. Det grundläggande resultatet var att det som kursplanen lade vikt vid fick mer utrymme i läromedel och undervisning, vilket i sin tur gav bättre elevresultat inom de områdena. Kanske är det ett föga förvånande och okontroversiellt resultat, men i länder där tilltron till nationell styrning av skolan historiskt sett inte har varit så hög (till exempel i England och USA) har detta resultat förmodligen varit desto mer kontroversiellt.

Notera att det finns mycket forskning som visar att styrdokuments budskap transformeras i läromedel och undervisning.<sup>4</sup> Så när jag skriver att det som kursplanen lade vikt vid fick mer utrymme i läromedel och undervisning, är det i grova drag.

Schmidt med flera (2001) visar också att relationerna mellan styrdokument, läromedel, undervisning och elevers lärande inte är någon enkel top-down-process där styrdokument påverkar läromedel och att lärarna sedan undervisar om det som läromedlen innehåller. I vissa länder förefaller styrdokument ha en mer direkt påverkan på undervisningen; läromedlens innehåll påverkar då lärarna i mindre grad. I andra länder påverkas inte läromedlen lika mycket av styrdokument, men det är främst läromedlen som påverkar undervisningen. Schmidt och Prawat (2006) utvecklar detta resultat och hävdar att den enkla top-down-processen inte är särskilt trolig alls. De menar istället att styrdokument har en direkt påverkan på lärarna och deras undervisning; mer detaljerade och

<sup>4</sup> Se Barquero (2023) för en översiktlig diskussion om transformation och hur det kan förstås och studeras när det gäller matematikundervisning.

konkreta riktlinjer i styrdokument gör lärarna mer benägna att följa dem. Men inte bara det, lärarna är då också benägna att i större grad undervisa om saker som inte tas upp i läromedlen så tydligt. Mindre detaljerade styrdokument gör däremot att lärare påverkas mer av läromedel. Schmidt och Prawat (2006) resonerar på liknande sätt om nationella prov och motsvarande.<sup>5</sup> Här får man inte glömma att läromedelsgranskning påverkar i vilken grad och på vilket sätt läromedel följer styrdokument. Och det är stor skillnad mellan länder när det gäller läroboksgranskning. I Sverige har vi till exempel ingen läroboksgranskning alls, medan exempelvis Singapore har det och det i vissa länder är så strängt att staten bara tillåter ett läromedel.<sup>6</sup>

Schmidt och Prawat (2006) berör också olika styrmodeller (centralisering–decentralisering) och styrdokumentens roll i dessa. Bakgrunden är den forskning som pekar på att ett större mått av centralisering också verkar leda till bättre elevresultat.<sup>7</sup> Viktiga begrepp i Schmidt och Prawats resonemang är ”curriculum coherence” och ”authoritativeness”, vilket jag översätter till *läroplanskoherens* och *auktoritativitet*. Läroplanskoherens betyder att styrdokument, lärarfortbildning, läromedel, undervisning, bedömning och betygssystem hänger ihop och handlar om snarlika saker. Auktoritativitet handlar om att det finns en instans i ett skolsystem med hög auktoritet eller trovärdighet, och denna instans slår fast vad undervisningen ska handla om. För att få till god läroplanskoherens behövs en auktoritativ instans som slår fast vad undervisningen ska handla om som övriga instanser eller aktörer följer. Historiskt sett har den auktoritativa instansen i många länder varit statens skol-

myndigheter som via styrdokument slår fast vad undervisningen ska handla om. Men den auktoritativa instansen behöver inte finnas inom statens organisation. Schmidt och Prawat (2006) lyfter fram, med USA som exempel, att det även i decentraliserade system kan finnas icke-statliga organisationer som fungerar som auktoritativa instanser och bidrar till läroplanskoherens.

Det har alltså visat sig fullt möjligt att erhålla en högre grad av läroplanskoherens. Därmed inte sagt att det är enkelt. Forskning pekar exempelvis på att styrdokumentens design måste utformas med omsorg, bedömningsinstrument måste anpassas och det måste finnas lyhördhet inför lärares verkliga behov. Därtill måste olika intressegrupper nå enighet om vad som är goda vetenskapliga belägg för hur reformer ska utformas (Morony 2023).

Forskningsresultaten som presenterats ovan påminner i vissa avseenden om forskningsresultat om svenska kursplaner i matematik, i synnerhet de resultat som rör Lgr 80 (Prytz 2023). I matematikkursplanen till Lgr 80 betonades både aritmetik och algebra samt några fler områden. Med betoning menas då att kursplanen angav aritmetik och algebra som egna områden, och de hade egna avsnitt där det beskrevs vad undervisningen skulle handla om. Beskrivningarna i avsnitten för aritmetik och algebra var dock olika utformade: aritmetiken fick en betydligt utförligare och mer detaljerad beskrivning av bland annat vad undervisningen skulle handla om och i vilken ordning innehållet skulle behandlas i undervisningen. Denna utförligare och mer detaljerade beskrivning åstadkoms i hög grad med matematiska (ämnesspecifika) uttryck

<sup>5</sup> Schmidt & Prawat (2006), s. 655. De använder samma TIMSS-data som i Schmidt m.fl. (2001).

<sup>6</sup> Se Rezat & Westbury (2024) för en översikt.

<sup>7</sup> Begreppet curriculum coherence har fått en central roll i matematikdidaktisk forskning om reformer. Exempelvis i översiktsverket *Mathematics Curriculum Reforms Around the World* har flera kapitler om curriculum coherence (Shimizu & Vithal, 2023, s. 119–224).

och begrepp. Detta tycks ha haft betydelse för både läroböcker, undervisning och lärande: algebran fick under perioden 1980–1995 successivt mindre utrymme i läroböckerna i jämförelse med aritmetiken. Under samma period förbättrades elevernas resultat i internationella kunskapsmätningar betydligt mer i aritmetik än i algebra. Detta ligger i linje med Schmidt och Prawats (2006) slutsatser om att målformuleringar i styrdokument som åtföljs av utförligare och konkretare riktlinjer bättre tycks påverka undervisningen i målens riktning. Likaså ligger det i linje med Schmidts (2001) resultat om att de områden som betonas i styrdokumentet får mer utrymme i läromedel samt att elevresultaten blir bättre inom de områdena.

En viktig implikation för framtida kursplane-  
arbete är att betoning av något i en kursplan  
inte bara är en fråga om att skapa vissa rubriker  
och textavsnitt till dessa rubriker; det handlar  
också om hur dessa textavsnitt designas och  
fogas samman med varandra.

## 3. Kursplaner i matematik i olika länder

Hur kursplaner utformas kan alltså variera. Detta blir tydligt när vi jämför hur de nuvarande kursplanerna i matematik i Sverige, Singapore, England och Estland är konstruerade.

### 3.1 Varför dessa länder?

Genomgången inleds med den svenska kursplanen i matematik för att kunna tydliggöra att de svenska designprinciperna skiljer sig väsentligt åt från Singapore, England och Estland.

Skälet till att studera *Singapores* kursplaner i matematik är att landet under lång tid har legat i toppskiktet i internationella kunskapsmätningar (Mullis 2020). Men det är också ett land som regelbundet ändrat i sina kursplaner. Som beskrivits ovan är Singapores skolsystem mycket centraliserat, det vill säga att många beslut som berör skolans verksamhet fattas av nationella skolmyndigheter.<sup>8</sup> Idag finns dock en ambition på den nationella politiska nivån att i vissa avseenden decentralisera skolsystemet (Kwek m.fl. 2023). Den historiskt starka centraliseringen återspeglas dock i både den gamla och nya kursplanen i matematik: riktlinjerna är fortsatt utförliga och detaljerade vad gäller såväl undervisningens innehåll och genomförande som hur elevernas kunskaper ska bedömas. Den decentraliserade trenden är emellertid klart urskiljbar mellan de gamla och nya kursplanerna i Singapore: de generella riktlinjerna blir fler, de detaljerade blir färre.

I rapporten studeras därför både den gamla och den nya kursplanen. Det ger ett utmärkt tillfälle att förstå hur en något mer decentraliserad kursplan, i ett centraliserat system, kan se ut och hur den skiljer sig från den föregående.

*England* är ett annat intressant fall att studera eftersom landet de senaste 30 åren tagit rakt motsatt väg än Sverige vad gäller skolans styrning och kursplanedesign, det vill säga mer centralisering och mer detaljerade kursplaner. Variationen i det engelska skolväsendet är och har historiskt varit stor. Faktum är att England länge saknade en nationell läro- och kursplanestruktur. Detta infördes först under slutet av 1980-talet. Den nu gällande läroplanen infördes under 2010-talet. Processen som ledde fram till den senaste engelska kursplanen i matematik är också intressant. I en rapport som föregick den påtalades behovet av att söka inspiration från andra länder, men också behovet av att basera kursplanerna på etablerad utbildningsvetenskaplig forskning (Oates 2011). Lagd bredvid den singaporianska kursplanen kan man ana var en del av inspirationen kom ifrån. Englands resultat i internationella kunskapsmätningar i matematik har också förbättrats successivt de senaste 30 åren (Mullis 2020).

<sup>8</sup> Se kap. 2 i denna rapport.

Också *Estland* har lyckats förbättra sina resultat i internationella kunskapsmätningar i matematik. I PISA 2018 presterade Estland till och med bäst av alla europeiska länder i årskurs 9 i matematik (OECD 2019). Av de kursplaner som undersöks i denna rapport är den estniska den som är mest lik den svenska. Men det finns också klara skillnader, vilket ger anledning att undersöka den estniska kursplanen närmare.

### 3.2 Hur kan man jämföra olika kursplaner?

Undersökningen av kursplanerna bygger på Basil Bernsteins begrepp *klassifikation och ramar* (Bernstein 1974). Klassifikation handlar om hur en kursplan byggs upp med olika enheter samt hur dessa enheter avgränsas i relation till varandra. Ett enkelt exempel från skolmatematiken är kategorierna aritmetik och geometri som används för att beskriva vad eleverna ska lära sig. Dessa kategorier kan sedan delas in i underkategorier. I en kursplan i matematik är dessa kategorier ofta hämtade från det matematiska ämnesspråket, men det är också vanligt att generiska uttryck för färdigheter och förmågor används, till exempel förstå och analysera. Dessa uttryck är generiska i bemärkelsen att de är meningsfulla i en mängd olika sammanhang bortom matematiken.

*Ramarna* handlar om hur enheterna skapar förutsättningar för undervisningen. En viktig aspekt är då sekvenseringen av enheter, deras ordning. En annan viktig aspekt är hur stor del de olika enheterna utgör.

Mer specifikt har undersökningen tagit fasta på följande i kursplanerna:

- *Undervisningens innehåll*, det vill säga vad undervisningen ska handla om och vad eleverna ska lära sig. Detta handlar dels om matematik, dess olika delområden och tillhörande matematiska begrepp. Och dels om vad eleverna förväntas göra med matematiken, det vill säga färdigheter och förmågor.
- *Hur innehållet är beskrivet*. Det kan till exempel handla om vilka typer av ord och uttryck som används eller hur matematiska termer sammanfogas med termer för färdigheter och förmågor.
- *Hur innehållet sekvenseras*, det vill säga den ordning i vilken innehållet ska behandlas i undervisningen.
- *Principer för innehållets sekvensering*. En kursplans innehåll kan till exempel sekvenseras utifrån en matematisk logik baserat på talens egenskaper, i detta fall talens storlek: först addition med heltal i talområdet 0 till 10, därefter subtraktion med heltal i talområdet 0 till 10 och sedan addition med heltal i talområdet 0 till 20. Men sekvenseringen kan till exempel också involvera en logik baserad på hur barn utvecklar räknefärdigheter.

Genomgångarna av respektive lands kursplan i matematik innehåller emellertid också en del allmänna beskrivningar av kursplanernas disposition samt information om kursplanerna.

### 3.3 Sverige

Den nuvarande svenska kursplanen i matematik, årskurs 1 till 9, hör till 2022 års läroplan för grundskolan.<sup>9</sup> Den läroplansreformen innebar mycket små förändringar av kursplanen i matematik och är mycket lik 2011 års kursplan i matematik, både med avseende på innehåll och struktur (Prytz 2023).

Kursplanen i matematik består av tre delar: syfte, centralt innehåll och kriterier för bedömning av kunskaper och betygskriterier. Syftesdelen är gemensam för alla årskurser 1–9, medan de andra två delarna har specifika delar för årskurserna 1–3, 4–6 och 7–9.

Syftesdelen inleds med att ange och förklara skälen till att eleverna ska studera matematik. Grundskälen handlar om att klara sig i vardag och arbetsliv, men också för vidare studier i matematik. Syftesdelen innehåller också en förklaring av vad det innebär att kunna matematik: en förklaring som avslutas med en lista med fem olika förmågor som undervisningen ska handla om; se exempel 1.

#### Exempel 1. Förmågor som eleverna ska utveckla, årskurs 1–9, Sverige

Förmåga att:

- använda och beskriva matematiska begrepp och samband mellan begrepp
- välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter

- formulera och lösa problem med hjälp av matematik och värdera valda strategier
- föra och följa matematiska resonemang
- använda matematikens uttrycksformer för att samtala om och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser.

Källa: Skolverket, Sverige (2022a), s. 55.

Dessa förmågor brukar i korthet kallas begreppsförmåga, metodförmåga, problemlösningsförmåga, resonemangsförmåga och kommunikationsförmåga.

Hur dessa förmågor hänger samman med det matematiska innehållet ges det inte någon närmare förklaring av i syftesdelen; matematiken beskrivs enbart med mycket allmänna uttryck som till exempel ”begrepp”, ”uttrycksformer” och ”beräkningar”.

Mer detaljer om det matematiska innehållet kommer under rubriken ”centralt innehåll”. Här anges i punktform vad undervisningen ska handla om. Ämnet delas upp på sex områden:

- taluppfattning och tals användning
- algebra
- geometri
- sannolikhet och statistik
- samband och förändring
- problemlösning

<sup>9</sup> Kursplanen i matematik finns i Skolverket, Sverige. (2022a), s. 54–64. Därtill finns ett kommentarmaterial (Skolverket, Sverige, 2022a) som förklarar vissa aspekter av kursplanen i matematik.

Alla tre årskursspann har samma indelning. Varje område delas sedan in i mindre delar, vilket illustreras med ett typiskt exempel (2) nedan. Exemplet gäller årskurs 1–3 och området taluppfattning och tals användning.

**Exempel 2. Centralt innehåll, taluppfattning och tals användning, årskurs 1–3, Sverige**

- Naturliga tal och deras egenskaper samt hur talen delas upp och används för att ange antal och ordning.
- Positionssystemet och hur det används för att beskriva naturliga tal.
- Symboler för tal och symbolernas utveckling i några olika kulturer genom historien.
- Tal i bråkform som del av helhet och del av antal samt hur delarna benämns och uttrycks som enkla bråk. Hur enkla bråk förhåller sig till naturliga tal.
- Hur naturliga tal och enkla tal i bråkform används i elevnära situationer.
- De fyra räknesättens egenskaper och samband samt användning i olika situationer.
- Metoder för beräkningar med naturliga tal, vid huvudräkning, överslagsräkning och skriftlig beräkning. Användning av digitala verktyg vid beräkningar.
- Rimlighetsbedömning vid uppskattningar och beräkningar.

Källa: Skolverket, Sverige (2022a), s. 55.

Exempel 2 har tre typiska egenskaper när det gäller beskrivningarna av det centrala innehållet:

1. Punkterna inleds med ett matematiskt begrepp, matematiska metoder eller en matematisk uttrycksform som ibland följs upp med ett verb eller ett substantiv som anger en handling.
2. Hur dessa innehållspunkter hänger samman med de fem förmågorna framgår inte.
3. Någon sekvensering av innehållet för årskursspannen 1–3, 4–6 och 7–9 görs inte.

Någon närmare beskrivning av vad eleverna ska lära sig inom det område som anges i exempel 2 ges inte heller i den del av kursplanen som handlar om det centrala innehållet. Exempel 2 representerar den mest utförliga detaljnivån i den svenska kursplanen i matematik. Ha detta i åtanke när motsvarande exempel från de andra ländernas kursplaner visas nedan.

Utöver kursplanen publicerar Skolverket även *kommentarmaterial* i varje grundskoleämne. Där tillkommer något fler detaljer angående det matematiska innehållet, men det tillförs inte mycket vad gäller sekvensering inom de tre åldersspannen. Så här sammanfattas exempelvis progressionen för området ”de fyra räknesätten och metoder för beräkningar” för alla årskurser 1–9; se exempel 3:

**Exempel 3. Progression för de fyra räknesätten, Sverige**

Progressionen ligger i att eleverna i de lägre årskurserna får möta och tillämpa metoder inom ett begränsat talområde, för att sedan i högre årskurser använda



dem i ett utvidgat talområde och med fler talmängder. I senare årskurser tillkommer fler metoder, samtidigt som kunskaper om när olika metoder är lämpliga att använda utvidgas och fördjupas. Säkerhet i metoder, och kunskaper om principerna bakom dem, ger en bra grund för att kunna välja lämpliga metoder och utföra beräkningar på ett för sammanhanget effektivt sätt.

Källa: Skolverket, Sverige (2022b), s. 14.

Åter till kursplanen. Avsnittet ”centralt innehåll” följs av avsnittet ”kriterier för bedömning av kunskaper och betygs-kriterier”. Kriterier anges för årskurs 3, 6 och 9. I detta avsnitt kopplas en del av de fem olika förmågorna samman med det matematiska innehållet. Varje förmåga får ett eget avsnitt. Exempel 4 visar ett typiskt exempel på en mer detaljerad del för årskurs 3 och metodförmågan.

#### **Exempel 4. Bedömningskriterium för årskurs 3, metodförmåga, Sverige**

Eleven väljer och använder i huvudsak fungerande matematiska metoder för att göra enkla beräkningar med naturliga tal och lösa enkla rutinuppgifter med tillfredsställande säkerhet. Eleven använder huvudräkning för att genomföra beräkningar med de fyra räknesätten. Vid addition och subtraktion väljer och använder eleven skriftliga räknemetoder med tillfredsställande säkerhet. Eleven hanterar enkla matematiska likheter och använder då likhetstecknet på ett fungerande sätt. Eleven avbildar och, utifrån instruktioner, konstruerar enkla geometriska objekt. Eleven gör enkla mätningar, jämförelser och uppskattningar av längder, massor,

volymer och tider och använder vanliga måttenheter. Vid olika undersökningar avläser och skapar eleven enkla tabeller och diagram för att sortera och redovisa resultat.

Källa: Skolverket, Sverige (2022a), s. 60.

I exempel 4 framgår det vilka metoder eleverna ska kunna använda, och det finns en koppling till det matematiska ämnesinnehållet och dess olika delområden. Formuleringarna är dock allmänt hållna.

Andra delar är betydligt mer kortfattade och detaljlösa och har ingen koppling alls mellan förmåga och ämnesinnehåll – som här i exempel 5 som gäller årskurs 6 och resonemangsförmågan för betyget G:

#### **Exempel 5. Bedömningskriterium för årskurs 6, resonemangsförmåga, Sverige**

Eleven för och följer matematiska resonemang genom att framföra och bemöta påståenden med enkla matematiska argument.

Källa: Skolverket, Sverige (2022a), s. 61.

Vad ett matematiskt resonemang kan vara inom exempelvis de olika områdena taluppfattning och tals användning, algebra och geometri framgår alltså inte i kursplanen.

I kommentarmaterialets avsnitt om bedömning tillkommer en hel del information om hur bedömningskriterierna ska förstås och användas. Det som framför allt utvecklas är hur uttryck såsom ”i huvudsak fungerande” och ”tillfreds-

ställande säkerhet” i exempel 4 ska urskiljas och värderas. Någon ytterligare information om vad metodförmågan är inom respektive ämnesområde tillkommer inte. Angående bedömningen av resonemangsförmågan (jämför exempel 5, årskurs 6) är instruktionerna allmänt hållna och utan koppling till något matematiskt ämnesinnehåll; se exempel 6.

#### **Exempel 6. Förklaring av bedömningskriterium resonemangsförmåga, Sverige**

Formuleringen för årskurs 6 och 9 handlar om i vilken grad eleven för fram argument och resonerar kring ställningstaganden, lösningar, resultatets rimlighet eller mer allmänt utforskar frågeställningar där matematik ingår. Bedömningen riktas även mot i vilken grad eleven använder underbyggda matematiska argument. Några aspekter kan då vara hur välgrundade, hållbara och tillräckliga argumenten är.

Källa: Skolverket, Sverige (2022b), s. 36.

Sammanfattningsvis är undervisningens innehåll inte särskilt väl beskrivet i den svenska kursplanen i matematik med tillhörande kommentarmaterial, varken det matematiska innehållet eller förmågorna. Kopplingen mellan det matematiska innehållet och förmågorna är otydlig, i synnerhet när det gäller undervisningens innehåll. Kopplingen är något tydligare i de delar som rör bedömning, men inte mycket. Progressionen mellan årskurser är otydlig, både vad gäller undervisningens innehåll och bedömningskriterier.

### **3.4 Singapore**

Den singaporienska skolmatematiken är mitt uppe i en reformprocess där 2013 års nationella kursplan för årskurs 1 till 6 successivt ersätts med 2021 års nationella kursplan. Detta innebär att när detta skrivs finns en ny kursplan i matematik för årskurserna 1–3, men inte i årskurserna 4–6. För årskurs 7–10 har bytet av kursplan redan slutförts.

Ser vi enbart till det matematiska innehållet så är förändringarna mycket små. Det är – med några små undantag, till exempel vad eleverna ska lära sig om klockan – samma matematiska innehåll. Matematikämnet är uppdelat på samma delämnena och fördelat på samma sätt över årskurserna. Den stora skillnaden handlar om hur innehållet struktureras och beskrivs, vilket jag återkommer till.

För att ge läsaren en övergripande uppfattning av vad förändringarna handlar om, beskrivs först 2013 års kursplan<sup>10</sup> och sedan hur 2021 års kursplan<sup>11</sup> har ändrats i relation till denna. I beskrivningarna av både den gamla och den nya kursplanen hämtas exempel från årskurserna 1 till 6, det vill säga primärstadiet (kursplanerna för årskurserna 7 till 10 är dock uppbyggda på liknande sätt).

2013 års kursplan i Singapore (både årskurs 1–6 och 7–10) har följande fyra delar:

1. *Övergripande inriktning.* I en introduktion anges bakomliggande syfte och mål med kursplanen och därtill beskrivs dess struktur. Det görs en kort hänvisning till de av utbildningsdepartementet formulerade ”21st century competencies” och hur matematikundervisningen kan bidra till dessa<sup>12</sup>.

<sup>10</sup> För åk. 1–6: Ministry of Education, Singapore, (2012a). För åk. 7–10: Ministry of Education, Singapore, (2012b)

<sup>11</sup> För åk. 1–6: Ministry of Education, Singapore, (2020). För åk. 7–10: Ministry of Education, Singapore, (2023)

<sup>12</sup> Singapores *Ministry of Education* har fastslagit en lista över kompetenser/förmågor som bedöms nödvändiga för att förbereda landets barn och unga för framtidens utmaningar (se <https://www.moe.gov.sg/education-in-sg/21st-century-competencies>). Därutöver har utbildningsdepartementet också en tydlig beskrivning av *Desired Outcomes of Education* som tydliggör vad landets barn och ungdomar kan förväntas lära sig under varje respektive stadie av deras utbildning (<https://www.moe.gov.sg/education-in-sg/desired-outcomes>).

2. Ett så kallat *matematiskt ramverk* presenteras. Här förklaras vad kunskap i matematik är i termer av färdigheter och förmågor. Förklaringen tar sin utgångspunkt i matematisk problemlösning, och det presenterade ramverket fungerar som en struktur där olika förmågor och färdigheter knyts samman. Dessa förmågor och färdigheter får också en allmän beskrivning.

3. *Principer för undervisning och bedömning*. Här ges allmänna principer för hur lärare bör planera och genomföra sin undervisning. Det förklaras kort att elevers lärande vanligtvis går igenom tre faser: "readiness", "engagement" och "mastery". Och det beskrivs hur läraren kan planera och undervisa i de olika faserna. Någon särskild undervisningsmetod förespråkas inte. Det påpekas istället att tre metoder utgör ryggraden: "activity-based learning", "teacher-directed inquiry" och "direct instruction" – förslagsvis i den ordningen. Bedömningsdelen handlar om

summativ och formativ bedömning. Mest textmassa viks åt att förklara hur bedömning kan användas som en del i undervisningen.

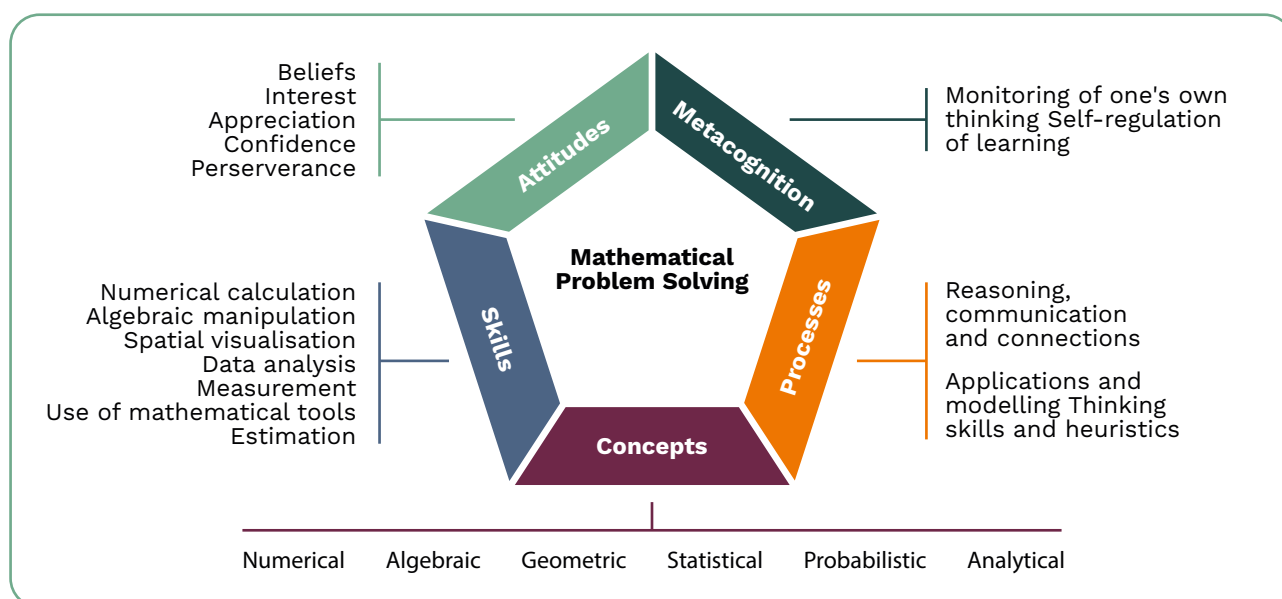
4. *Innehåll*. En utförlig beskrivning (årskursvis) görs av vad matematikundervisningen ska handla om. Beskrivningen baseras på tre så kallade "content strands" och en så kallad "process strands":

Content strands är matematiska delämnena och utgörs av

- tal och algebra
- mätning och geometri
- statistik och sannolikhet (det senare endast i årskurs 7–10).

Dessa tre delämnena delas sedan in i ytterligare underkategorier; se tabell 3 nedan.

**Bild 1.** Grundläggande matematiskt ramverk, Singapore, 2012



Källa: Ministry of Education, Singapore, (2012a), s. 14.

Process strands handlar om olika *förmågor* och *färdigheter*, till exempel inom *resonemang* och *kommunikation*.

Vi ska nu titta lite närmare på hur ramverket (del 2) och innehållet (del 4) är konstruerade och hur de hänger ihop. Det är de delar som främst handlar om undervisningsinnehållet. En intressant egenskap hos dessa delar är hur en allmänt hållen förklaring i del 2 (om hur matematisk kunskap består av flera olika förmågor och färdigheter) i del 4 knyts samman med det matematiska innehållet via beskrivningar av vad eleverna ska få möjlighet att göra.

Presentationen av det matematiska ramverket i del 2 bygger på följande modell där matematisk problemlösning står i centrum; se bild 1 ovan.

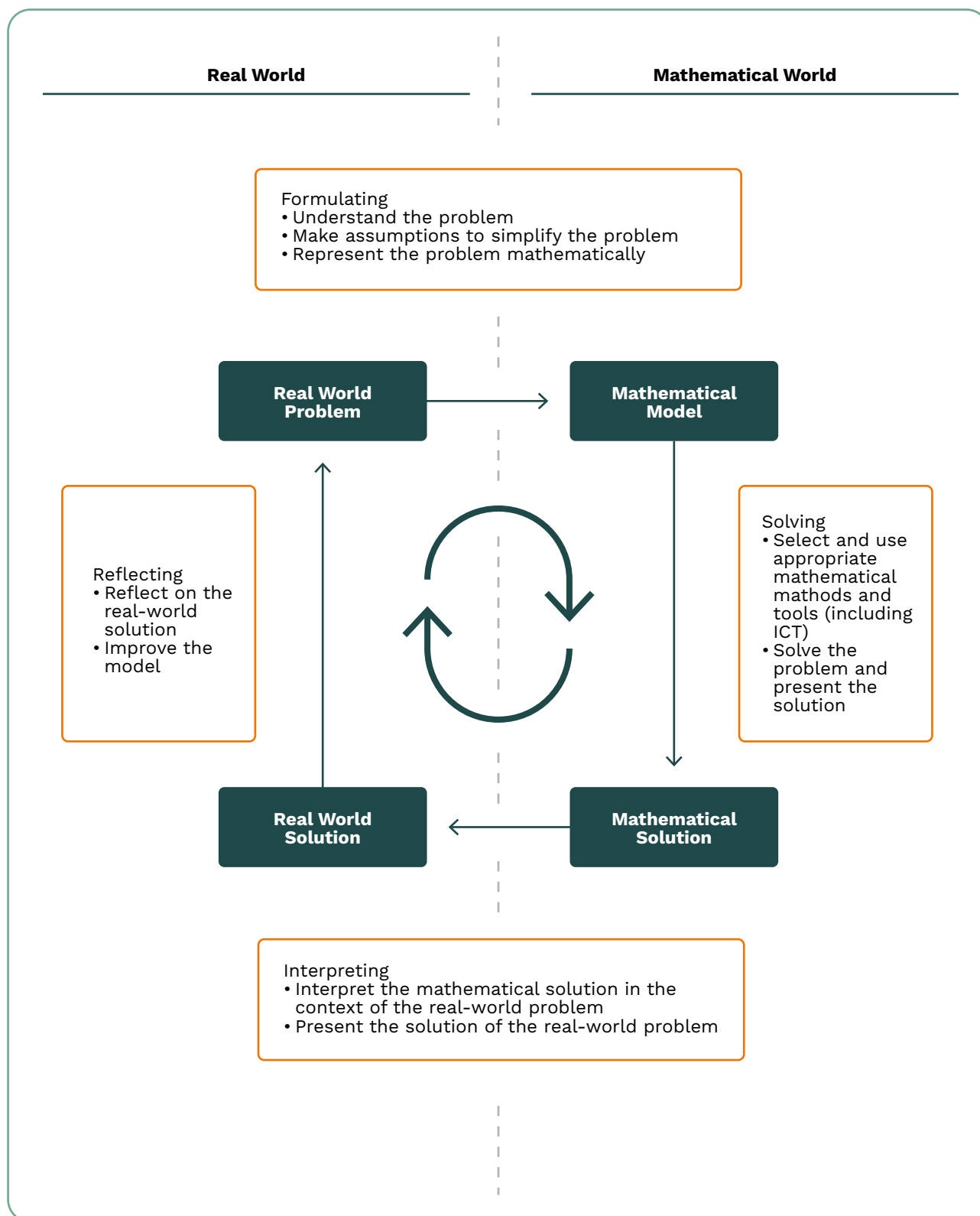
Begreppet matematisk problemlösning får inte någon direkt förklaring, däremot förklaras de fem grundbegrepp som omger kärnan. Den matematiska problemlösningssprocessen tydliggörs dock i förklaringen av *processes*, och det handlar då om modellering och lösandet av "real world problems" med hjälp av matematik; se bild 2.

Den centrala idén med Singapores kursplan verkar då närmast vara att eleverna ska använda sig av matematik just för att lösa problem. Detta är ett viktigt didaktiskt ställningstagande.

Problemlösning kan lite förenklat sägas ha två funktioner i matematikundervisningen. En är funktionen som mål: eleverna lär sig för att kunna lösa problem. En annan är funktionen som medel: eleverna löser problem för att lära sig matematik. Enligt Singapores kursplan verkar hela tanken med ramverket vara att hjälpa lärarna fokusera på de fem olika komponenter som behövs för att eleverna ska bli goda problemlösare, det vill säga funktionen som mål.

Den mest omfattande delen i Singapores kursplan är del 4, som mer precist beskriver undervisningens *innehåll*. Denna del bygger framför allt på ramverkets nedre delar (i bild 1 ovan): *skills*, *concepts* och *processes*. Detta blir särskilt tydligt när man tittar på den här delens olika områden. Tabell 2 visar ett utdrag ur kursplanen från 2012 över de matematiska processer som undervisningen ska täcka. Där syns tydligt att man till stor del också använder de uttryck och begrepp som anges tillsammans med *skills*, *concepts* och *processes* (i synnerhet *processes*) i det grundläggande matematiska ramverk som presenterades i bild 1 ovan.

**Bild 2.** Matematisk modelleringsprocess, Singapore, 2012



Källa: Ministry of Education, Singapore, (2012a), s. 16.

**Tabell 2.** Matematiska processer, Singapore, 2012

No.	Processes	Indicators
<b>Mathematical processes</b>		
MP1	Reasoning, Communication and Connections	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Use appropriate notations, symbols and conventions to present and communicate mathematical ideas</li> <li>• Reason inductively and deductively by:                             <ul style="list-style-type: none"> <li>– Observing patterns, similarities and differences.</li> <li>– Drawing logical conclusions and making inferences.</li> <li>– Explaining or justifying solutions, writing out the solutions mathematically.</li> </ul> </li> <li>• Make connections within mathematics and between mathematics and everyday life.</li> </ul>
MP2	Applications	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Apply mathematics concepts and skills to solve problems in a variety of contexts within or outside mathematics, including:                             <ul style="list-style-type: none"> <li>– Identifying the appropriate mathematical representations for a problem.</li> <li>– Using appropriate mathematical concepts, skills (including tools and algorithm) to solve a problem.</li> <li>– Interpreting the mathematical solution in the context of the problem and making sense of the solution.</li> </ul> </li> </ul>
MP3	Thinking Skills and Heuristics	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Use thinking skills such as:                             <ul style="list-style-type: none"> <li>– Classifying</li> <li>– Comparing</li> <li>– Sequencing</li> <li>– Generalising</li> <li>– Induction</li> <li>– Deduction</li> <li>– Analyzing (from whole to parts)</li> <li>– Synthesizing (from parts to whole)</li> </ul> </li> <li>• Use a problem-solving model such as Polya’s model</li> <li>• Use heuristics such as:                             <ul style="list-style-type: none"> <li>– Drawing a diagram</li> <li>– Tabulating</li> <li>– Guess and check</li> <li>– Working backwards</li> <li>– Simplifying a problem</li> <li>– Considering special cases</li> </ul> </li> </ul>

Källa: Ministry of Education, Singapore, (2012a), s. 32.

Själva kopplingen till det matematiska innehållet framgår dock allra tydligast av de tabeller över de olika delområdenas innehåll (*content strands*) som också finns i kursplanen (se tabell 3 nedan). Det matematiska innehållet listas

i den vänstra spalten, medan det i den högra spalten preciseras vad eleverna därmed ska få möjlighet att göra. Här används då återigen ord och uttryck som använts just för att beskriva vad *skills*, *concepts* och *processes* handlar om.

**Tabell 3.** Beskrivning av innehåll och lärandeupplevelser, Singapore, 2012

Content	Learning Experiences
<b>PRIMARY ONE</b>	
<b>Number and algebra</b>	
<b>SUB-STRAND: WHOLE NUMBERS</b>	
<b>1. Number up to 100</b>	<b>Students should have opportunities to:</b>
1.1 Counting to tell the number of objects in a given set. 1.2 Number notation, representations and place values (tens, ones). 1.3 Reading and writing numbers in numerals and in words. 1.4 Comparing the number of objects in two or more sets. 1.5 Comparing and ordering numbers. 1.6 Patterns in number sequences. 1.7 Ordinal numbers (first, second, up to tenth) and symbols (1st, 2nd, 3rd etc). 1.8 Number bonds for numbers up to 10.	a) Use number bond posters and make number stories to build and consolidate number bonds for numbers up to 10. b) Work in groups using concrete objects to: <ul style="list-style-type: none"> <li>– make a group of ten and count on from 10 to tell the number (less than 20).</li> <li>– make groups of ten and count tens and ones to tell the number (more than 20).</li> <li>– estimate the number of objects in a set before counting.</li> <li>– make sense of the size of 100.</li> </ul> c) Use concrete objects and the base-ten set to represent and compare numbers in terms of tens and ones, and use language such as “more than”, “fewer than”, “the same as” and “as many as” to describe the comparison. d) Play games using dot cards, picture cards, numeral cards and number-word cards etc. for number recognition and comparison. e) Describe a given number patterns using language such as “1 more/less” or “10 more/less before continuing the pattern or finding the missing number(s).
<b>2. Addition and Subtraction</b>	<b>Students should have opportunities to:</b>
2.1 Concepts of addition and subtraction. 2.2 Use of +, - and = 2.3 Relationship between addition and subtraction. 2.4 Adding more than two 1-digit numbers. 2.5 Adding and subtracting within 100. 2.6 Adding and subtracting using algorithms. 2.7 Solving 1-step word problems involving addition and subtraction within 20. 2.8 Mental calculation involving addition and subtraction: <ul style="list-style-type: none"> <li>– Within 20</li> <li>– Of a 2-digit number and ones without renaming</li> <li>– Of a 2-digit number and tens</li> </ul>	a) Work in groups to make addition and subtraction stories using concrete objects/pictures and write an addition or subtraction equation for each story. b) Write two addition facts and two subtraction facts for a given number bond within 10. c) Use strategies such as “count on”, “count back”, “make ten” and “subtract from 10” for addition and subtraction within 20 (before committing the number facts to memory) and thereafter, within 100. d) Compare two numbers within 20 to tell how much one number is greater (or smaller) than the other by subtraction. e) Achieve mastery of basic addition and subtraction facts within 20 through playing a wide range of games. f) Use the base-ten set to illustrate the standard algorithms for addition and subtraction of 2-digit numbers.

Källa: Ministry of Education, Singapore, (2012a), s. 34.

På så sätt kan det mer abstrakta ramverket i kursplanens del 2 tydligare hänga ihop med beskrivningar av vad eleverna förväntas få möjlighet att göra (och därmed lära sig).

Liknande detaljerade beskrivningar finns för varje delområde och årskurs. Det innebär att kursplanens – och därmed ämnets – progression blir tydlig: man kan se i vilken ordning och takt som undervisningen förväntas fortgå.

I innehållsbeskrivningen i tabell 3 används också formuleringen "achieve mastery". Därmed kopplar man här tydligt ihop innehållet (del 4) med de *principer för undervisning och bedömning* som anges i kursplanens del 3 om hur elevers lärande vanligtvis går igenom tre faser: *readiness, engagement* och *mastery*. I tabell 3 anger således achieve mastery ett slags slutsteg: under detta läsår ska eleven ha uppnått goda och stabila kunskaper inom angivet delområde. Även detta bidrar till en tydlig progression.

Singapore har dock valt att försöka utveckla skolmatematiken ytterligare genom 2021 års kursplan. Här sker vissa förändringar kring hur man kopplar ihop kursplanens olika delar.

Vi börjar med ramverket för problemlösning (del 2), vilket i stor utsträckning handlade om färdigheter och förmågor samt vad man ska ha matematik till. I 2021 års kursplan kompletteras detta med en förklaring av matematikens natur, som placeras redan före ramverket för problemlösning.

Förklaringen av matematikens natur utgår från matematiska objekt som kopplas till fyra teman:

1. properties and relationships
2. operations and algorithms
3. representation and communication
4. abstractions and applications.

Förklaringen av matematikens natur tar inledningsvis mest fasta på vad matematik är, närmare bestämt de matematiska objektens egenskaper och deras inbördes relationer. Även avsnittet om operationer och algoritmer har liknande inriktning på vad matematik är, men successivt glider förklaringarna över till att företrädesvis handla om hur människor gör saker med matematiska objekt – till exempel förstår, definierar, räknar, representerar, kommunicerar eller abstraherar. De två sista temana har liknande inriktning, det vill säga de handlar om hur människor gör saker med matematiken.

Beskrivningarna av dessa teman kompletteras därefter av åtta så kallade "Big Ideas" som skär igenom ovan nämnda teman:

1. diagrams
2. equivalence
3. functions (endast för årskurs 7–10)
4. invariance
5. measures
6. models (endast för årskurs 7–10)
7. notations
8. proportionality.



Sex av dessa Big Ideas handlar om matematiska begrepp (2, 3, 4, 5, 6 och 8), medan övriga två handlar om uttrycksformer (1 och 7). Syftet med att införa dessa Big Ideas i kursplanen från 2021 verkar vara att skapa sammanlänkning mellan ämnesområden och årskurser genom kursplanen.

Efter dessa stora idéer presenteras återigen ett ramverk för problemlösning som är mycket likt motsvarande avsnitt i 2013 års kursplan.

Men en annan stor förändring är den avslutande delen där matematiska delområden presenteras. Det man huvudsakligen gör här är att ta bort saker. Man tar till exempel bort avsnitten om matematiska processer med tillhörande tabell (tabell 2 ovan). Likaså försvinner avsnitten om *Learning Experiences*, vilket innebär att den högra spalten i tabell 3 också utgår. Kvar är alltså enbart den vänstra spalten som anger matematiskt innehåll; se tabell 4.

**Tabell 4.** Beskrivning av innehåll, Singapore, 2021

<b>Primary one</b>
<b>Number and algebra</b>
<b>SUB-STAND: WHOLE NUMBERS</b>
<b>1. Numbers up to 100</b>
1.1 Counting to tell the number of objects in a given set.
1.2 Number notation, representations and place values (tens, ones).
1.3 Reading and writing numbers in numerals and in words.
1.4 Comparing the number of objects in two or more sets.
1.5 Comparing and ordering numbers.
1.6 Patterns in number sequences.
1.7 Ordinal numbers (first, second, up to tenth) and symbols (1st, 2nd, 3rd, etc.)

## 2. Addition and Subtraction

- 2.1 Concepts of addition and subtraction.
- 2.2 Use of +, - and =.
- 2.3 Relationship between addition and subtraction.
- 2.4 Adding more than two 1-digit numbers.
- 2.5 Adding and subtracting withing 100.
- 2.6 Adding and subtracting using algorithms.
- 2.7 Mental calculation involving addition and subtraction:
  - Within 20
  - Of a 2-digit number and ones without renaming
  - Of a 2-digit number and tens

Källa: Ministry of Education, Singapore, (2020), s. 31.

Notera att det var i den högra spalten i tabell 3 under rubriken "Learning Experiences" som den explicita kopplingen till kursplanens andra delar fanns. Sammantaget medför detta en viss skillnad mellan hur de båda kursplanerna länkar samman kursplanernas olika delar. I 2013 års kursplan knyts ett generellt ramverk om matematikens användning ihop med mer konkreta och detaljerade beskrivningar av vilken matematikundervisning som förväntas och vad eleverna då också väntas göra. Denna typ av sammanlänkning försvinner i och med 2021 års kursplan. Men i den kursplanen förklaras istället hur vissa teman och idéer knyter samman olika ämnesområden och årskurser, vilket inte görs i 2013 års kursplan.

Sammantaget gör detta att detaljnivån minskar något, men jämfört med hur den svenska kursplanen i matematik från 2022 ser ut är det fortfarande en betydligt högre detaljrikedom med mer ämnesspråk och en tydligare progression.

### 3.5 England

Den engelska kursplanen i matematik är uppdelad i fem stadier, så kallade ”Key stages”<sup>13</sup>

De delar som motsvarar den svenska grundskolan är Key stages 1 till 4; se tabell 5.

**Tabell 5.** Struktur för Englands kursplaner, årskurs 1–13

Key stages	Årskurs	Ålder
1	1–2	5–6
2	3–6	7–10
3	7–9	11–13
4	10–11	14–15
5	12–13	16–17

Konstruktionen av kursplanerna för Key stages 1 och 2, å ena sidan, och Key stages 3 och 4, å andra sidan, skiljer sig åt på väsentliga punkter. De förra beskriver detaljrikt vad undervisningen ska handla om en årskurs i taget, medan de senare – i likhet med vår svenska Lgr 22 – anger vad undervisningen i varje årskursintervall ska handla om.

Vi börjar med kursplanen för Key stages 1 och 2, vilken utgör ett dokument. De inledande delarna om matematikämnets syfte och övergripande mål är korta, knappt en sida. Det finns ingen motsvarighet till de singaporianska kursplanernas långa beskrivningar av problemlösning eller matematikens natur.

Angående de övergripande målen så anges tre olika aspekter av vad kunskaper i matematik är; se exempel 7.

#### Exempel 7: Syfte och mål i ämnet matematik, England, 2013

The national curriculum for mathematics aims to ensure that all pupils:

- become **fluent** in the fundamentals of mathematics, including through varied and frequent practice with increasingly complex problems over time, so that pupils develop conceptual understanding and the ability to recall and apply knowledge rapidly and accurately
- **reason mathematically** by following a line of enquiry, conjecturing relationships and generalisations, and developing an argument, justification or proof using mathematical language
- can **solve problems** by applying their mathematics to a variety of routine and non-routine problems with increasing sophistication, including breaking down problems into a series of simpler steps and persevering in seeking solutions.

Källa: Department for Education, England, (2013a), s. 3.

Dessa punkter påminner om det som i Sverige benämns *förmågor*. Den första punkten motsvarar då förmågorna *begrepp* respektive *metod*, den andra punkten motsvarar *resonemangsförmåga* och den sista punkten motsvarar *problemlösningsförmåga*. Kommunikationsförmågan saknas bland de engelska målen, men har ett eget avsnitt

<sup>13</sup> Den engelska kursplanen för åk. 1–13 är uppdelad på fyra så kallade Key stages och återfinns i tre dokument. Key stages 1–2: Department for Education, England, (2013a) Key stage 3: Department for Education, England, (2013b) Key stage 4: Department for Education, England, (2014)

(Spoken language) strax efter målen och kopplas där samman med matematiska resonemang.

En detalj i den första målpunkten är ordet ”fluent” som kopplas samman med begrepps-förståelse och förmågan att minnas och tillämpa kunskaper snabbt och riktigt. *Fluent* eller *flytande* är alltså ett i kursplanen någorlunda väl definierat begrepp som handlar om en kvalitet som ska utvecklas i elevernas kunskaper. Det påminner om det som i den singaporienska kursplanen kallas för mastery. Begreppet fluent används också på ett sätt som liknar hur begreppet mastery används i den singaporienska kursplanen. Begreppet återkommer på många ställen och anger då en slags slutpunkt i såväl undervisning som lärande; undervisningen inom ett visst delområde ska fortgå tills eleven uppnått flyt. Exempel på detta visas längre ner (se exempel 9).

Målet om att uppnå flyt återspeglas också i den tydliga riktlinjen för användningen av *informations- och kommunikationsteknik* (IKT). Miniräknare eller motsvarande får inte användas förrän nära slutet av Key stage 2, det vill säga då eleverna är cirka tio år gamla. Tanken är att eleverna först måste utveckla säkerhet i huvudräkning och skriftlig räkning.

Som tidigare nämnts är kursplanen för Key stage 1 och 2 detaljrik och anger för varje årskurs vad undervisningen ska handla om. Tidigt i kursplanen framgår dock att det finns utrymme för flexibilitet, men den flexibiliteten är villkorad; se exempel 8.

### Exempel 8. Om lokala anpassningar av den engelska kursplanen

The programmes of study for mathematics are set out year-by-year for key stages 1 and 2. Schools are, however, only required to teach the relevant programme of study by the end of the key stage. Within each key stage, schools therefore have the flexibility to introduce content earlier or later than set out in the programme of study. In addition, schools can introduce key stage content during an earlier key stage, if appropriate. All schools are also required to set out their school curriculum for mathematics on a year-by-year basis and make this information available online.

Källa: Department for Education, England, (2013a), s. 4.

Likaså finns det en flexibilitet vad gäller elevers individuella behov. En majoritet av eleverna förväntas följa kursen i samma takt, men vissa elever kan gå snabbare fram och andra långsammare. Den snabbare studietakten, för dem som tar till sig begrepp snabbt, ska i första hand handla om mer komplicerade problem och inte ett nytt innehåll. Den långsammare studietakten är till för dem som inte når flyt.

Innehållsmässigt delas matematikämnet in i ett antal delämnena som fördelas över årskurserna på följande vis; se tabell 6.

**Tabell 6.** Delämnena och deras fördelning över årskurser, England

Key stage	1		2				3			4	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Område/årskurs											
Number											
Measurement											
Geometry											
Statistics											
Ratio and proportion + rates of change											
Algebra											
Probability											

I Key stage 1 och 2 bryts dessa delämnena ner i ett antal mindre delområden. Till exempel delas i Key stage 1 och 2 delämnet *Number* upp i följande delområden:

- number and place value
- addition and subtraction
- multiplication and division
- fractions.

Kursplanen disponeras så att varje Key stage har ett eget kapitel. Key stage 2 (ungefär motsvarande vårt lågstadium) delas dessutom upp i en lägre och övre del, med varsitt kapitel. Varje Key stage-kapitel inleds med en mer allmän beskrivning av vilket fokus som undervisningen ska ha. Därefter ges för varje årskurs, delämne och delområde riktlinjer för vad eleverna ska undervisas om. Nedan visas ett typiskt exempel (9), i detta fall från delområdet ”number and place value” i delämnet ”Number” i årskurs 2 (vilket åldersmässigt ungefär motsvarar förskoleklassen i Sverige):

**Exempel 9. Om tal och platsvärde i årskurs 2, England**

Number – number and place value

**Statutory requirements**

Pupils should be taught to:

- count in steps of 2, 3, and 5 from 0, and in tens from any number, forward and backward
- recognise the place value of each digit in a two-digit number (tens, ones)
- identify, represent and estimate numbers using different representations, including the number line
- compare and order numbers from 0 up to 100; use  $<$ ,  $>$  and  $=$  signs
- read and write numbers to at least 100 in numerals and in words
- use place value and number facts to solve problems.

**Notes and guidance (non-statutory)**

Using materials and a range of representations, pupils practise counting, reading, writing and comparing numbers to at least 100 and solving a variety of related problems to develop fluency. They count in multiples of three to support their later understanding of a third.

As they become more confident with numbers up to 100, pupils are introduced to larger numbers to develop further their recognition of patterns within the number system and represent them in different ways, including spatial representations.

Pupils should partition numbers in different ways (for example,  $23 = 20 + 3$  and  $23 = 10 + 13$ ) to support subtraction. They become fluent and apply their knowledge of numbers to reason with, discuss and solve problems that emphasise the value of each digit in two-digit numbers. They begin to understand zero as a place holder.

Källa: Department for Education, England, (2013a), s. 11.

I exempel 9 syns en rad typiska aspekter som återkommer i alla delämnena och delområdena.

Det finns två typer av direktiv: den övre rutan anger vad skolorna måste undervisa om enligt lag (statutory requirements) och den undre rutan är vägledande (non-statutory) om undervisningens innehåll.

Varje sådant direktiv i kursplanen, oavsett typ, inleds – precis som i exemplet ovan – med ett verb som anger en mer konkret handling som eleverna ska få undervisning om. Denna handling kopplas till ett eller flera matematiska begrepp. Handlingen är mer konkret i bemärkelsen att det är enkelt att avgöra om eleven utför handlingen eller inte. Det matematiska innehållet beskrivs detaljerat. Vi kan i exempel 9 se hur stora tal undervisningen ska handla om och vad det är för slags uppdelningar eleverna kan få undervisning om ( $23 = 20 + 3$  och  $23 = 10 + 13$ ).

Det finns alltså en tydlig koppling mellan förmågor (uttryckt som konkreta handlingar) och det matematiska innehållet.

Angående progression så kan vi i exempel 9 se hur ordet *fluent* används i direktiven (se näst sista meningen under "Notes and guidance"). *Fluent* används för att peka ut det eleverna ska kunna med säkerhet, att jämföra med andra saker som eleverna *ska börja förstå* eller *vara mer säkra på*.

För de äldre eleverna på Key stage 3 och 4 (åldersmässigt mer motsvarande svenskt mellan- och högstadium) är kursplanedesignen en annan. Den stora skillnaden är att undervisningens innehåll inte beskrivs årskursvis utan just i stadier.

De två första sidorna i kursplanerna för både Key stage 3 och 4 liknar dock – både till form och innehåll – motsvarande sidor för Key stage 1 och 2 och handlar om undervisningens syfte och mål. Därefter följer, i både Key stage 3 och 4, en beskrivning av vad de tre målen "develop fluency", "reason mathematically" och "solve problems" handlar om. Här följer ett typiskt exempel (10) på hur develop fluency beskrivs i kursplanen för Key stage 3:

### Exempel 10. Målbeskrivning, Key stage 3, England

Develop fluency

- consolidate their numerical and mathematical capability from key stage 2 and extend their understanding of the number system and place value to include decimals, fractions, powers and roots
- select and use appropriate calculation strategies to solve increasingly complex problems
- use algebra to generalise the structure of arithmetic, including to formulate mathematical relationships
- substitute values in expressions, rearrange and simplify expressions, and solve equations
- move freely between different numerical, algebraic, graphical and diagrammatic representations [for example, equivalent fractions, fractions and decimals, and equations and graphs]
- develop algebraic and graphical fluency, including understanding linear and simple quadratic functions
- use language and properties precisely to analyse numbers, algebraic expressions, 2-D and 3-D shapes, probability and statistics.

Källa: Department for Education, England, (2013b), s. 4.

I likhet med tidigare exempel används i exempel 10 en tydlig punktlista där varje mening inleds med verb som sedan kopplas ihop med uttryck som beskriver ett delämne eller ett delområde. Precis som med Key stage 1 och 2 kopplas förmågor och matematiskt innehåll samman, men på ett något mindre detaljerat vis.

Därefter följer tydliga beskrivningar av vad eleverna ska undervisas om inom de olika delämnena. Exempel 11 visar ungefär halva listan för delämnet algebra i Key stage 3:

### Exempel 11. Innehållsbeskrivning för algebra, Key stage 3, England

Algebra

Pupils should be taught to:

- use and interpret algebraic notation, including:
  - $ab$  in place of  $a \times b$
  - $3y$  in place of  $y + y + y$  and  $3 \times y$
  - $a^2$  in place of  $a \times a$ ,  $a^3$  in place of  $a \times a \times a$ ;  $a^2b$  in place of  $a \times a \times b$
  - $\frac{a}{b}$  in place of  $a \div b$
  - coefficients written as fractions rather than as decimals
  - brackets
- substitute numerical values into formulae and expressions, including scientific formulae
- understand and use the concepts and vocabulary of expressions, equations, inequalities, terms and factors
- simplify and manipulate algebraic expressions to maintain equivalence by:
  - collecting like terms
  - multiplying a single term over a bracket

- taking out common factors
- expanding products of two or more binomials

- understand and use standard mathematical formulae; rearrange formulae to change the subject
- model situations or procedures by translating them into algebraic expressions or formulae and by using graphs.

Källa: Department for Education, England, (2013b), s. 6.

I likhet med övriga delämnena innehåller listan i exempel 11 ovan många detaljer angående vilka matematiska begrepp och vilken notation som ska användas, till exempel "ab in place of  $a \times b$ ", men till skillnad från Key stage 1 och 2 delas inte delämnena i Key stage 3 och 4 in i delområden.

Sammantaget finns även i England en tydlighet och detaljrikedom som skiljer sig från hur vi valt att göra i Sverige. I vissa avseenden är man än mer tydlig än i Singapore. I likhet med Singapore har man en rik användning av matematiska termer och begrepp, samtidigt som båda länderna betonar en slags utveckling av färdigheter och förmågor mot mastery och fluency.

### 3.6 Estland

Den estniska kursplanen i matematik är från 2014. Den liknar den svenska i att den är jämförelsevis kort och till stor del uppbyggd av kompetenser.<sup>14</sup> Tidigt i kursplanen slås det fast att eleverna efter 9 år i grundskolan ska utveckla nio matematiska kompetenser; se exempel 12:

#### Exempel 12. Matematiska kompetenser, Estland

It is expected that, through mathematics education, basic school graduates will:

1. understand the value of and enjoy mathematics
2. have knowledge of mathematical concepts and relations
3. be capable of logical reasoning, justification and proof
4. use solution strategies for standard problems and be capable of solving mathematical problems
5. be capable of presenting information in the form of text, graphs, tables, diagrams and formulas
6. be able to use information and communication technology tools for learning
7. be capable of analysis and reaching conclusions through reasoning based on available facts
8. apply mathematical knowledge in other school subjects and in daily life
9. have knowledge of the specialties and professions in the subject field and assess their abilities and interests in the context of potentially continuing their studies in mathematics-related fields.

Källa: Ministry of Education and Research, Estonia, (2014), s. 1.

<sup>14</sup> Kursplanen för åk. 1–9 är samlad i ett dokument: Ministry of Education and Research, Estonia, (2014)

Det förklaras också på vilket sätt matematikundervisningen kan bidra till att utveckla sju allmänna kompetenser som inte är specifika för matematikämnet, utan generella för hela det estniska skolväsendet:

- cultural and value competence
- social and citizenship competence
- self-management competence
- learning to learn competence
- communication competence
- mathematics and natural sciences and technology competence
- entrepreneurial competence.

Därtill beskrivs flera möjligheter till att integrera matematik i flera andra skolämnen samt hur matematik kan förekomma i temastudier som skär genom flera skolämnen.

Innan undervisningens innehåll preciseras i kursplanen ges korta riktlinjer för hur undervisningen bör planeras och organiseras, vad som gäller för bedömning (mest hänvisningar till andra styrdokument) samt vissa grundläggande krav på den fysiska lärmiljön (som tillgång till whiteboardtavla eller motsvarande och miniräknare).

Vad gäller undervisningens innehåll är den delen av kursplanen uppdelad i tre stadier (1, 2 och 3) med tre årskurser per stadium.

Varje stadietavsnitt inleds med lärande- och undervisningsmål som eleverna ska ha uppnått i slutet av stadiet, det vill säga i årskurs 3, 6 och 9. Dessa omfattar alla delämnena. För årskurs 3 anges följande mål; se exempel 13.

### **Exempel 13. Mål för lärande och undervisning i matematik, årskurs 3, Estland**

After completing the 3rd grade of study, students:

1. understand the studied rules and are able to apply them
2. can count objects in the surrounding world and classify and compare them based on one or two parameters
3. can read, understand and explain age-appropriate mathematical texts
4. can use suitable tools and measurement units for measuring values
5. are able to notice mathematics-related elements in daily life and describe them with figures or geometrical shapes
6. can use digital study materials
7. understand the importance of mathematics and its connections with the surrounding world.

Källa: Ministry of Education and Research, Estonia, (2014), s. 7.

Den typiska egenskapen hos målformuleringarna i exempel 13 ovan är att verb för både konkreta och abstrakta handlingar används. Exempel på konkret handling är *räkna objekt*; exempel på abstrakt handling är *förstå*. Användandet av adjektiv i vissa målformuleringar gör dem också mer öppna för tolkning, till exempel i mål 4 där *lämpliga* verktyg och måttenheter ska användas.



Lärande- och undervisningsmål följs sedan av det som kallas för *läranderesultat* ("learning outcomes") och *lärandeinhåll* ("learning content"). Dessa resultat och innehåll preciseras för varje delämne. Den estniska uppdelningen av matematikämnet visas i tabell 7:

**Tabell 7.** Delämnena och deras fördelning över årskurser, Estland

#### Årskurs 1–3

Calculations

Measurement and text problems

Geometric objects

#### Årskurs 4–6

Calculations

Data and algebra

Geometric figures and measurement

#### Årskurs 7–9

Calculations and data

Percentages

Algebra

Functions

Geometry

Noterbart i denna uppdelning är att benämningarna skiljer sig något åt mellan stadierna samt att varken statistik eller sannolikhetslära är egna delämnena. Statistik ingår i "Data and algebra" i årskurs 4 till 6. Sannolikhetslära ingår i delämnet "Calculation and data" i årskurs 7 till 9.

Formuleringarna av läranderesultat och lärandeinhåll följer samma mönster, vilket illustreras med exempel 14 som gäller årskurs 1 till 3.

#### Exempel 14. Läranderesultat och lärandeinhåll, årskurs 1–3, Estland

Calculation

#### Learning Outcomes

The students:

1. read, write, order and compare natural numbers from 0 to 10 000
2. present a number as the sum of units, tens, hundreds and thousands
3. read and write ordinal numbers
4. add and subtract up to 100 mentally and up to 10 000 in writing
5. recite the multiplication table (multiply and divide with a one-digit number up to 100 mentally)
6. know the names of the components and results of the four arithmetic operations
7. find the numerical value of a letter in equations by means of trying or on the basis of analogy
8. determine the correct order of operations in expressions (parentheses, multiplication/division and adding/subtracting).

### Learning Content

Numbers from 0 to 10 000 and their presentation as the sum of ones, tens, hundreds and thousands. Equation and inequality. Comparison and ordering numbers. Ordinal numbers. Odd and even numbers. Addition, subtraction, multiplication and division of numbers up to 100 mentally. Addition and subtraction up to 10 000 in writing. Names of components of addition, subtraction, multiplication and division operations (summand, sum; minuend, subtrahend, difference; divisor, product; dividend, divisor, and quotient). Relations between addition and subtraction, and multiplication and division. Relation of multiplication to addition.

Rules of mental and written arithmetic. Letters as symbols of numbers. Finding the numerical value of a letter in equations. Use of computer programmes in order to practise the required calculating skills.

Källa: Ministry of Education and Research, Estonia, (2014), s. 7.

Under rubriken "Learning Outcomes" anges ett resultat. Varje resultatpunkt inleds med ett verb för en konkret handling (med något undantag, som "know") och denna handling kopplas till ett matematiskt innehåll. Detta matematiska innehåll preciseras sedan under rubriken "Learning Content" där ett stort antal matematiska termer används för att närmare beskriva innehållet.

Sammantaget finns det flera likheter mellan den estniska och den svenska kursplanen i matematik. En tydlig skillnad är dock hur förmågor och matematik kopplas samman på ett tydligare och utförligare vis i den estniska kursplanen.

## 4. Sammanfattande slutsatser

Startpunkten för denna rapport är tesen att en framtida svensk kursplan i matematik i större grad bör präglas av mer utförliga och precisa beskrivningar med ämnesspecifika uttryck och begrepp: detta i kontrast till dagens kursplan som mer baseras på generiska uttryck och begrepp.

Syftet med rapporten är att ge perspektiv på hur en framtida svensk kursplan i matematik kan se ut genom att visa hur andra länders kursplaner i matematik är utformade. När vi då jämför med Singapore, England och Estland ser vi hur kursplanerna i dessa länder, i betydligt större utsträckning än den nuvarande svenska, använder utförliga och precisa beskrivningar med ämnesspecifika uttryck och begrepp. Inslaget av ämnesspråk är alltså större.

Jag söker också beskriva vad dessa utförliga och mer precisa beskrivningar med ämnesspecifika uttryck används till. Min slutsats är att de främst används till två saker: *koppla ihop matematik med förmågor* och *beskriva progression*.

### 4.1 Kopplingen mellan matematik och förmågor

En gemensam egenskap hos kursplanerna från Singapore, England och Estland är att det finns tydliga kopplingar mellan matematik och förmågor. I den nuvarande svenska kursplanen är dessa kopplingar otydliga; förmågorna beskrivs för sig och det matematiska innehållet beskrivs för sig.

I kursplanerna från Singapore, England och Estland görs kopplingen mellan matematik och förmågor på i huvudsak två sätt som jag benämner *principiell* förklaring och *specifik* förklaring.

De båda singaporienska kursplanerna (den gamla och den nya) skiljer ut sig från övriga genom att i början av kursplanen ha en vad jag kallar längre *principiell* förklaring av vad matematik är och vad det innebär att kunna matematik. Den är principiell så till vida att den handlar om matematik och undervisning i allmänhet och inte om enskilda begrepp eller undervisningssituationer. I dessa förklaringar framgår hur förmågor och matematik hänger samman, till exempel i samband med problemlösning som är ett huvudtema i både den gamla och nya kursplanen. Noterbart är att den principiella förklaringen är avsevärt längre i den nya singaporienska kursplanen än i den äldre.

De engelska och estniska kursplanerna är inledningsvis betydligt mer kortfattade kring matematik och förmågor. Det handlar om ett fastslående om att de finns och en kort förklaring till vad som avses. Den principiella förklaringen är med andra ord mycket kort i dessa kursplaner.

När det gäller den *specifika* förklaringen är samtliga av de singaporienska, engelska och estniska kursplanerna utförliga. Dessa förklaringar finns i de delar där undervisningens innehåll och mer specifika mål anges. Förklaringarna är specifika i den bemärkelsen att de i meningar kopplar samman konkreta handlingar med matematiska begrepp. Konkreta handlingar är till exempel att jämföra och ordna ett antal tal inom ett visst intervall. En abstrakt handling är att förstå tal inom ett visst intervall.

I de specifika förklaringarna är ord för konkreta handlingar klart vanligast i kursplanerna från såväl Singapore och England som från Estland. Noterbart är att de specifika förklaringarna är avsevärt färre i den nya singaporianska kursplanen än i den äldre.

Vi kan alltså notera ett skifte i den singaporianska kursplanedesignen vad gäller hur kopplingen mellan förmågor och matematik förklaras, där ett större antal specifika förklaringar i den äldre kursplanen byts mot en längre principiell förklaring i den nu gällande.

De båda singaporianska kursplanerna och den engelska har dock mer utförliga specifika förklaringar än den estniska. Detta hänger samman med hur matematikämnet – toppkategorin – delas in i underkategorier och i ytterligare underkategorier till underkategorierna. Den estniska har bara en kategorinivå under ämnet matematik. De singaporianska och den engelska har två kategorinivåer under ämnet matematik så att man än tydligare kan precisera vad som ska undervisas om.

## 4.2 Progression

Kursplanerna från Singapore, England och Estland anger progression på olika sätt.

Den estniska kursplanen anger bara specifika mål för årskurserna 3, 6 och 9. Någon progression mellan dessa årskurser anges inte. Detta är mycket likt den svenska kursplanen. Skillnaden mot den svenska kursplanen är att målen uttrycks med mer detaljer angående matematiken, och kopplingen mellan matematik och förmågor är tydligare (se föregående avsnitt 4.1).

Den äldre singaporianska kursplanen har en mycket utförligt beskriven progression. Kursplanen anger för varje enskild årskurs 1–9 vad undervisningen ska handla om, och beskrivningarna är utförliga; se avsnitt 4.1. Den nya singaporianska kursplanens progression är något mindre utförlig, vilket beror på färre innehållsbeskrivningar, men täcker ändå varje årskurs mellan 1 och 9.

Den engelska kursplanen är en blandning mellan den estniska och de singaporianska när det gäller progression. För årskurserna 1 till 6 är progressionen tydlig med en årskursvis kursplan med utförliga innehållsbeskrivningar för varje årskurs. För årskurserna 7 till 11 är progressionen något mindre tydlig. Detta eftersom målformuleringarna är mer allmänna och de mer detaljerade innehållsbeskrivningarna inte gäller någon specifik årskurs, utan avser årskursintervallen 7–9 respektive 10–11.

De båda singaporianska kursplanerna och den engelska har ytterligare en dimension när det gäller progression. I beskrivningarna av vad undervisningen ska handla om används begrepp för hur lärandet av vissa förmågor och begrepp utvecklas – en process. I de singaporianska kursplanerna används inom vissa områden (till exempel aritmetik) uttrycket *mastery* för att beteckna att eleverna nått den högsta nivån inom ett visst område. I den engelska kursplanen används på motsvarande vis uttrycket *fluency*. Både *mastery* och *fluency* används på ett dikotomt vis, det vill säga antingen har en elev nått dit eller så har hen inte gjort det.

Motsvarande begrepp på svenska är att *med säkerhet* kunna något. I den svenska kursplanens avsnitt "Kriterier för bedömning av kunskaper och betygskriterier" används ordet säkerhet, men då inte på ett dikotomt vis. Elevens säkerhet är snarare en fråga om grader där lärarna har till uppgift att skilja mellan de rätt oprecisa uttrycken "tillfredsställande", "god" respektive "mycket god" säkerhet. Dessa formuleringar om säkerhet i den svenska kursplanen avser dock bara de avslutande stadieårskurserna 3, 6 och 9.

En annan skillnad mellan å ena sidan den äldre singaporianska kursplanen och den engelska kursplanen och å andra sidan den svenska kursplanen handlar om placeringen av orden mastery, fluency och säkerhet. I den engelska och den äldre singaporianska kursplanen används orden mastery och fluency redan i avsnitten om vad den första årskursens undervisning ska handla om. I den svenska kursplanen används ordet säkerhet först när bedömningskriterier för årskurs 3 formuleras. I den nya singaporianska kursplanen anges dock inte lika noggrant när mastery borde nås; formuleringarna är mer allmänna.

## 5. Vägar framåt mot en ny svensk kursplan

Läroplanskoherens (curriculum coherence) vore en lämplig målsättning för det av regeringen aviserade arbetet med nya kursplaner för grundskolan. Med läroplanskoherens avses att styrdokument, lärarfortbildning, läromedel, undervisning, bedömning och betygssystem hänger ihop och handlar om snarlika saker. En sådan målsättning skulle ha vetenskapligt stöd, vilket framgår av kapitel 2 i denna rapport. Med tanke på att det svenska skolsystemet idag involverar en mängd olika aktörer med olika intressen (statliga skolmyndigheter, 290 kommuner, enskilda skolhuvudmän, läromedelsförlag, lärar- och skolledarfackförbund, edtechbolag, privata lärarfortbildare och lärarutbildningar vid ett 20-tal lärosäten) så kan tanken på att alla ska dra åt samma håll vara tilltalande.

Forskning pekar på att mer detaljerade kursplaner är en framkomlig, men inte enkel, väg för att nå läroplanskoherens. I denna rapport har jag pekat på hur det kan göras i matematikämnet genom att i större utsträckning än i den nuvarande svenska kursplanen använda ämnesspecifika uttryck och begrepp. Emellertid kommer det förmodligen inte att räcka att fylla en kursplan med sådana uttryck. Meningar måste fogas samman och stycken och avsnitt måste hänga ihop. Viktiga frågor man då bör ha i åtanke handlar om kopplingen mellan matematik och förmågor samt progression. Denna rapport visar hur man hanterat dessa frågor i andra länder på lite olika sätt.

De stora skillnaderna i kunskapsresultat mellan skolor, de många eleverna utan godkända resultat samt den internationellt sett låga andelen elever som når riktigt höga kunskaper är andra skäl för reformer. Att då skapa en tydligare nationellt riktningssivande kursplan för vad det innebär att ha kunskaper i matematik – och i vilken takt kunskaperna bör utvecklas (progression) – förefaller rimligt.

Det är möjligen lätt att associera detaljerade kursplaner med en ökad press på lärare. Forskare har till exempel pekat på att lärare i det engelska skolsystemet känner sig pressade att införa en viss policy, inte minst då reformerna där involverat ett stort mått av tester och uppföljningar (Perryman m.fl. 2011). Samma forskare har dock också sett att lärare kan uppskatta denna situation då de får skollidningens uppmärksamhet och kan ställa krav på bättre resurser. Annan forskning pekar på att en mer detaljerad kursplan kan leda till att lärare blir mer självständiga och undervisar mer om annat än innehållet i läromedel och nationella prov (Schmidt & Prawat 2006). En ambition med en ny typ av kursplan skulle således kunna vara att stärka lärarkårens ställning gentemot andra intressenter. Men det förutsätter att kursplanens innehåll och design får acceptans bland lärare.

Sammantaget finns det goda skäl för att kommande kursplanereformer försöker eftersträva ökad läroplanskoherens och arbetar mot att förtydliga såväl ämnesinnehåll som progression med ett utförligare ämnesspråk. Här kan viktig inspiration hämtas från Singapore, Estland och England.

# Appendix A: Jämförelse mellan kursplanerna i Sverige och Singapore

## Singapores kursplan från 2021

PRIMARY ONE (F-klass)	PRIMARY TWO (årskurs 1)	PRIMARY THREE (årskurs 2)
<b>1. Numbers up to 100</b>	<b>1. Numbers up to 1 000</b>	<b>1. Numbers up to 10 000</b>
1.1 counting to tell the number of objects in a given set	1.1 counting in tens/hundreds	1.1 counting in hundreds/thousands
1.2 number notation, representations and place values (tens, ones)	1.2 number notation, representations and place values (hundreds, tens, ones)	1.2 number notation, representations and place values (thousands, hundreds, tens, ones)
1.3 reading and writing numbers in numerals and in words	1.3 reading and writing numbers in numerals and in words	1.3 reading and writing numbers in numerals and in words
1.4 comparing the number of objects in two or more sets	1.4 comparing and ordering numbers	1.4 comparing and ordering numbers
1.5 comparing and ordering numbers	1.5 patterns in number sequences	1.5 patterns in number sequences
1.6 patterns in number sequences	1.6 odd and even numbers	
1.7 ordinal numbers (first, second, up to tenth) and symbols (1st, 2nd, 3rd, etc.)		

## Sveriges Lgr 22

Sverige årskurs 1–3  
(alla åren)

### Taluppfattning och tals användning

- Naturliga tal och deras egenskaper samt hur talen delas upp och används för att ange antal och ordning.
- Positionssystemet och hur det används för att beskriva naturliga tal.
- Symboler för tal och symbolernas utveckling i några olika kulturer genom historien.
- Tal i bråkform som del av helhet och del av antal samt hur delarna benämns och uttrycks som enkla bråk. Hur enkla bråk förhåller sig till naturliga tal.
- Hur naturliga tal och enkla tal i bråkform används i elevnära situationer.
- De fyra räknesättens egenskaper och samband samt användning i olika situationer.
- Metoder för beräkningar med naturliga tal, vid huvudräkning, överslagsräkning och skriftlig beräkning. Användning av digitala verktyg vid beräkningar.
- Rimlighetsbedömning vid uppskattningar och beräkningar.

### Algebra

- Matematiska likheter och likhetstecknets betydelse.
- Obekanta tal och hur de kan betecknas med en symbol.
- Enkla mönster i talföljder och enkla geometriska mönster samt hur de konstrueras, beskrivs och uttrycks.
- Entydiga stegvisa instruktioner och hur de konstrueras, beskrivs och följs som grund för programmering. Hur symboler används vid stegvisa instruktioner.

PRIMARY ONE (F-klass)	PRIMARY TWO (årskurs 1)	PRIMARY THREE (årskurs 2)
<b>2. Addition and Subtraction</b>		
2.1 concepts of addition and subtraction	2.1 addition and subtraction algorithms (up to 3 digits)	2.1 addition and subtraction algorithms (up to 4 digits)
2.2 use of +, – and =	2.2 mental calculation involving addition and subtraction of a 3-digit number and ones/tens/hundreds	2.2 mental calculation involving addition and subtraction of two 2-digit numbers
2.3 relationship between addition and subtraction		
2.4 adding more than two 1-digit numbers		
2.5 adding and subtracting within 100		
2.6 adding and subtracting using algorithms		
2.7 mental calculation involving addition and subtraction <ul style="list-style-type: none"> <li>• within 20</li> <li>• of a 2-digit number and ones without renaming of a 2-digit number and tens</li> </ul>		



PRIMARY ONE (F-klass)	PRIMARY TWO (årskurs 1)	PRIMARY THREE (årskurs 2)
<b>3. Multiplication and Division</b>		
3.1 concepts of multiplication and division	3.1 multiplication tables of 2, 3, 4, 5 and 10	3.1 multiplication tables of 6, 7, 8 and 9
3.2 use of $\times$	3.2 use of $\div$	3.2 multiplying and dividing within the multiplication tables
3.3 multiplying within 40	3.3 relationship between multiplication and division	3.3 division with remainder
3.4 dividing within 20	3.4 multiplying and dividing within the multiplication tables	3.4 multiplication and division algorithms (up to 3 digits by 1 digit)
	3.5 mental calculation involving multiplication and division within the multiplication tables of 2, 3, 4, 5 and 10	3.5 mental calculation involving multiplication and division within the multiplication tables
		SUB-STRAND: FRACTIONS
		<b>1. Equivalent Fraction</b>
		1.1 equivalent fractions
		1.2 expressing a fraction in its simplest form
		1.3 comparing and ordering unlike fractions with denominators of given fractions not exceeding 12
		1.4 writing the equivalent fraction of a fraction given the denominator or the numerator
		<b>3. (Sic!) Addition and Subtraction</b>
		2.1 adding and subtracting two related fractions within one whole with denominators of given fractions not exceeding 12

# Referenser

**Barquero, B., Jessen, B. E., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Golding, J. (2023).** What Theories and Methodologies Are Appropriate for Studying Phenomena Related to Mathematics Curriculum Reforms?. In *Mathematics Curriculum Reforms Around the World: The 24th ICMI Study* (pp. 193–217). Cham: Springer International Publishing.

**Bernstein, B. (red.)** (1974). *Class, codes and control Vol. 1 Theoretical studies towards a sociology of language*. (2. rev. ed., repr.) London: Routledge.

**De Bock, D. (red.)** (2023). *Modern Mathematics: An International Movement?*. Cham: Springer International Publishing.

**Department for Education, England. (2013a).** *Mathematics programmes of study: key stages 1 and 2. National curriculum in England*. Hämtad från [https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment\\_data/file/335158/PRIMARY\\_national\\_curriculum\\_-\\_Mathematics\\_220714.pdf](https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/335158/PRIMARY_national_curriculum_-_Mathematics_220714.pdf) (2023-08-22)

**Department for Education, England. (2013b).** *Mathematics programmes of study: key stage 3. National curriculum in England*. Hämtad från [https://assets.publishing.service.gov.uk/media/5a7c1408e5274a1f5cc75a68/SECONDARY\\_national\\_curriculum\\_-\\_Mathematics.pdf](https://assets.publishing.service.gov.uk/media/5a7c1408e5274a1f5cc75a68/SECONDARY_national_curriculum_-_Mathematics.pdf) (2023-08-21)

**Department for Education, England. (2014).** *Mathematics programmes of study: key stage 3. National curriculum in England*. Hämtad från [https://assets.publishing.service.gov.uk/media/5a7dc9dced915d2ac884d8ef/KS4\\_maths\\_PoS\\_FINAL\\_170714.pdf](https://assets.publishing.service.gov.uk/media/5a7dc9dced915d2ac884d8ef/KS4_maths_PoS_FINAL_170714.pdf) (2023-08-21)

**Green, A. (1997).** *Education, globalization and the nation state*. Basingstoke: Macmillan.

**Kwek, D., Ho, J. & Wong, Hwei M. (2023).** *Singapore's educational reforms toward holistic outcomes. (Un)intended consequences of policy layering*. The Brookings Institution.

**Ministry of Education, Singapore. (2012a).** *Mathematics syllabus. Primary One to Six. Implementation starting with 2013 Primary One Cohort*. Hämtad från [https://www.moe.gov.sg/-/media/files/primary/mathematics\\_syllabus\\_primary\\_1\\_to\\_6.pdf](https://www.moe.gov.sg/-/media/files/primary/mathematics_syllabus_primary_1_to_6.pdf) (2023-08-21)

**Ministry of Education, Singapore. (2012b).** *O- & N(A)-Level Mathematics Teaching and Learning Syllabus*. Hämtad från <https://libris.nie.edu.sg/sites/default/files/maths%20ordinary-and-normal-academic-level-2013.pdf> (2023-08-21)

**Ministry of Education, Singapore. (2020).** *Mathematics syllabus. Primary One to Six. Implementation starting with 2021 Primary One Cohort (Updated up to Primary 3)*. Hämtad från <https://www.moe.gov.sg/-/media/files/syllabus/2021-pri-mathematics-1-to-3.pdf> (2023-08-21)

**Ministry of Education, Singapore. (2023).**

*Mathematics syllabus. Secondary One to Four. Implementation starting with 2020 Secondary One Cohort (Updated up to Primary 3).* Hämtad från [https://www.moe.gov.sg/-/media/files/secondary/syllabuses/maths/2020-express\\_na-maths\\_syllabuses.pdf](https://www.moe.gov.sg/-/media/files/secondary/syllabuses/maths/2020-express_na-maths_syllabuses.pdf) (2023-08-21)

**Ministry of Education and Research, Estonia.**

**(2014).** Appendix 3: Mathematics. Hämtad från <https://www.hm.ee/en/media/1954/download> (2023-08-31)

**Morony, W. (2023).** Conclusion Achieving Coherence and Relevance in Mathematics Curriculum Reforms: Some Guiding Principles. I Shimizu, Y., & Vithal, R. (red.). *Mathematics Curriculum Reforms Around the World: The 24th ICMI Study*. Cham: Springer, s. 219–220.

**Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D. L., & Fishbein, B. (2020).** *TIMSS 2019 international results in mathematics and science*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA)

**Oates, T. (2011).** Could do better: Using international comparisons to refine the National Curriculum in England. *Curriculum journal*, 22(2), 121–150.

**OECD (2019).** *PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do*, PISA, OECD Publishing, Paris

**Perryman, J., Ball, S., Maguire, M., & Braun, A. (2011).** Life in the pressure cooker—School league tables and English and mathematics teachers' responses to accountability in a results-driven era. *British Journal of Educational Studies*, 59(2), 179–195.

**Prytz, J. (2018).** The New Math and School Governance: An Explanation of the Decline of the New Math in Sweden. I: Furinghetti, F., Karp, A. (red.). *Researching the History of Mathematics Education. ICME-13 Monographs*. Springer, Cham.

**Prytz, J. (2023).** *Grundskolans kursplaner i matematik: igår, idag och imorgon*. Stockholm: Svenskt Näringsliv

**Rezat, S. & Westbury, I. (publiceras 2024).**

Textbooks and Curriculum from a Governance Perspective. I: Clements, M. A., Kaur, B., Lowrie, T., Mesa, V., & Prytz, J. (red.). *The Fourth International Handbook of Mathematics Education*. Springer, Cham.

**Shimizu, Y., & Vithal, R. (red.) (2023).** *Mathematics Curriculum Reforms Around the World: The 24th ICMI Study*. Cham: Springer

**Schmidt, W.H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S., & Wolfe, R. G. (2001).** *Why schools matter: a cross-national comparison of curriculum and learning*. San Francisco, Calif.: Jossey-Bass, A Wiley.

**Schmidt, W. H., & Prawat, R. S. (2006).** Curriculum coherence and national control of education: issue or non issue?. *Journal of curriculum studies*, 38(6), 641–658.

**Skolverket, Sverige. (2022).** *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet. Lgr22*. Upplaga 1:2. Stockholm: Skolverket

**Skolverket, Sverige. (2022).** *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik. Grundskolan*. Hämtad från <https://www.skolverket.se/getFile?file=9790> (2023-08-22)

**Teng, S. S., Abu Bakar, M., & Layne, H.**  
**(2020).** Education reforms within neoliberal paradigms: A comparative look at the Singaporean and Finnish education systems. *Asia Pacific journal of education*, 40(4), 458–471.

## Om författaren



*Johan Prytz* är docent i didaktik och doktor i matematik med inriktning matematikens historia och didaktik. Han har också en gymnasielärarexamen i matematik och historia. Han är anställd som lektor vid Uppsala universitet, Institutionen för pedagogik, didaktik och utbildningsstudier, och är verksam i en forskargrupp i matematikdidaktik och en forskargrupp i utbildningshistoria. Under snart 20 år har Prytz forskat om matematikundervisningens historia. Forskningen har till stor del handlat om reformer av svensk skolmatematik under 1900-talet: hur de har initierats, förberetts och implementerats samt vilket genomslag de har haft.







**Näringslivets  
skolforum**  
SWEDISH ENTERPRISE SCHOOL FORUM